

Ф.С. Березовская, А.М. Молчанов

СЛОЖНАЯ ОСОБАЯ ТОЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ.
ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ БИОХИМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

I. Введение

Одной из задач, возникающих при моделировании кинетики химических реакций, является изучение стационарных точек двумерных динамических систем.

В работе решается близкая задача исследования изолированной сложной особой точки $O(0,0)$ неавтономного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}, \quad (1)$$

у которого правая часть —дробно-рациональная функция.

Основная идея — расщепление вырождения на конечное число простых особенностей. Способ решения — замена переменных, которая позволяет выделить главную часть уравнения. Указан способ отыскания сепаратрис особой точки.

2. Регулярный случай

В невырожденном случае действительная часть корней характеристического уравнения

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

отлична от нуля: $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$.

Главной в окрестности О частью уравнения (I) будет линейное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}. \quad (2)$$

Задача становится гораздо более сложной, если $\lambda = 0$. Нетрудно найти примеры, которые показывают, что отбрасывание формально "неглавных" (в смысле однородности) членов Р и Q может привести к качественно неправильной картине поведения решения уравнения (I) в окрестности особой точки.

3. Исключительные линии – границы однотипного поведения интегральных кривых

Если особая точка не является центром или фокусом, то все интегральные кривые стремятся к ней, имея асимптотику $y \sim x^\alpha$ (α положительно и рационально). Разных типов решений уравнения (I)

$$y = kx^\alpha + O(x^\alpha) \quad (3)$$

существует лишь конечное число. Они отличаются друг от друга константой k или показателем степени асимптотики α .

Это обстоятельство позволяет строить разбиение окрестности особой точки на секторы, границами которых служат "исключительные линии" вида

$$y = kx^\alpha. \quad (4)$$

Мы назовем линию (4) исключительной, если существует интегральная кривая уравнения (I) $y = \phi(x)$, для которой $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi(x)}{x^\alpha} = k$. Скажем при этом, что кривая $y = \phi(x)$ стремится к 0 "вдоль" исключительной линии.

Например, исключительными линиями линейного уравнения (2) могут быть прямые $y = kx$, где k – действительный корень уравнения $a_{12}k^2 + a_{11} - a_{22}k + a_{21} = 0$ (1), (2).

Исключительными линиями могут служить сепаратрисы седла, направляющие узла и т.п.

З а м е ч а н и е I. При $\alpha \rightarrow \infty$ (0) исключительной линией станет показательная (логарифмическая) функция, но это возникает из-за дополнительного вырождения, изучение которого выходит за рамки данной работы. Для отыскания исключительных линий используем соотношение

$$\frac{dy}{dx} \sim \alpha \frac{y}{x}.$$

Оно порождает алгебраическое уравнение

$$F(\alpha, x, y) \equiv \alpha y P(x, y) - x Q(x, y) = 0. \quad (5)$$

Исключительные линии – решения уравнения (5), которые проходят через точку $(0,0)$. Для их отыскания нужно использовать метод многоугольника Ньютона [3], [4], который позволяет найти показатель асимптотики α и константу k при старшем члене разложения.

4. Замена переменных

Из уравнения (5) можно найти линии вида (4). Для того, чтобы определить характер этих линий, применим к уравнению (I) замену переменных

$$\begin{cases} x = x \\ u = \frac{y}{x^\alpha} \end{cases} \quad x > 0 \quad (x < 0) \quad (6)$$

для каждого найденного α .

Это преобразование разворачивает точку $x = 0, y = 0$ в ось u . Все линии вида (3) перейдут в прямые, параллельные оси $x - u = \text{const}$

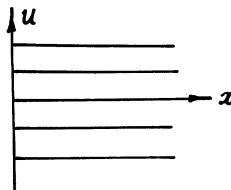
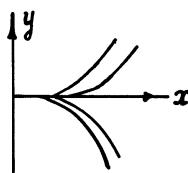


Рис. I

В координатах (x, u) уравнение (I) примет вид:

$$x^s \frac{du}{dx} = f(u) + \phi(x, u), \quad (7)$$

$s \geq 1$; $\phi(x, u)$ – мероморфная функция, обращающаяся в нуль при $x = 0$, $f(u)$ – рационально выражается через P и Q . Если дополнительного вырождения нет

$$f(u) \neq 0, \quad (8)$$

то можно изучать интегрируемое уравнение

$$x^s \frac{du}{dx} = f(u). \quad (9)$$

В работе доказано, что если уравнение

$$f(u) = 0 \quad (10)$$

не имеет кратных и комплексных корней, то решения уравнений (7) и (9) совпадают в главном члене при $x \rightarrow 0$. Знание решений уравнения (7) позволяет судить о поведении интегральных кривых исходного уравнения (I), имеющих асимптотику x^α .

5. Структура решений в плоскости (x, y)

Если u_i – действительные однократные корни уравнения (IO), то в системе координат (x, u) на оси $x = 0$ будет расположен ряд особых точек $(0, u_i)$ – седел или узлов, на которые распалась особая точка исходного уравнения. Инвариантные лучи $u = u_i$ уравнения (9) соответствуют исключительным линиям $y = u_i x^\alpha$ уравнения (I). В зависимости от расположения нулей и полюсов функции в уравнении (I) возможны 3 разных типа секторов, заключенных между исключительными линиями (4).

Пусть \bar{u} , \bar{v} – два последовательных корня уравнения (IO):

$$\bar{u} < \bar{v} \text{ и } f'(\bar{u}) \cdot f'(\bar{v}) \neq 0.$$

I) Производные $f(u)$ разных знаков

$$f'(\bar{u}) \cdot f'(\bar{v}) < 0. \quad (11)$$

Условие (II) означает, что $f(u)$ на интервале (\bar{u}, \bar{v}) имеет четное число полюсов. Пусть, например,

$$f'(\bar{u}) < 0, \quad (12)$$

тогда точка $(0, \bar{u})$ - седло, $(0, \bar{v})$ - узел. В этом случае будет бесконечно много интегральных кривых уравнения (I), для которых $\frac{y}{x^\alpha} \rightarrow \bar{v}$ и только одна кривая, для которой $\frac{y}{x^\alpha} \rightarrow \bar{u}$ при $x \rightarrow 0$. Кривая $y = \bar{v}x^\alpha + O(x^\alpha)$ - направляющая узлового пучка, а кривую $y = \bar{u}x^\alpha + O(x^\alpha)$ назовем сепаратрисой ("разделяющей"). Получаем, что условие (12) выделяет сепаратрисы среди исключительных линий (4)

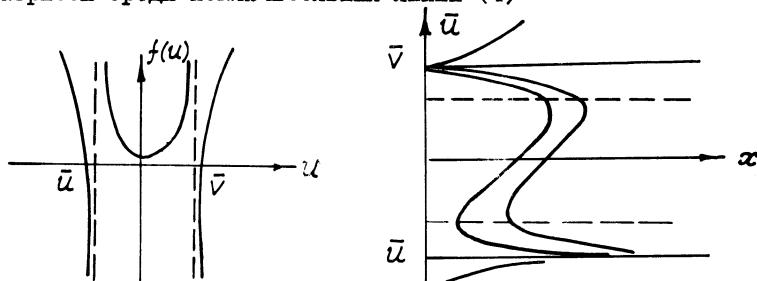


Рис.2

Функция $f(u)$ имеет 2 полюса, а все интегральные кривые уравнения (9), расположенные между лучами $u = \bar{u}$, $u = \bar{v}$ имеют 2 точки перегиба

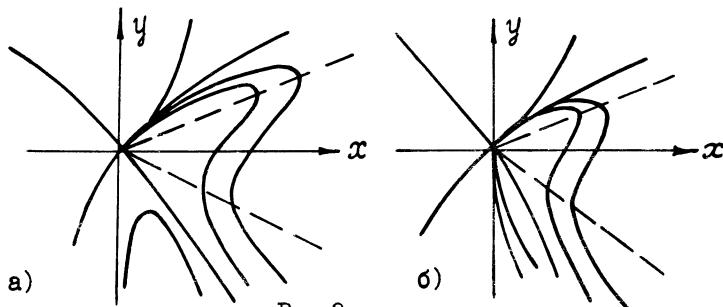


Рис.3

Поведение интегральных кривых, входящих в 0 на плоскости (x, y) "по другую сторону" сепаратрисы определяется, если учесть характер следующей асимптотики. Возможны 2 варианта:
а) следующая исключительная линия при $x=0$, $y < 0$ - сепаратриса;
б) направляющая узла

З а м е ч а н и е 2. Метод позволяет решать не только прямую задачу – исследование особой точки, но и обратную: дана структура особой точки, построить соответствующую систему уравнений. Для этого нужно подобрать подходящую функцию $f(u)$, нули которой соответствуют исключительным линиям, а полюса – точкам перегиба интегральных кривых. Отметим, что весь сектор, ограниченный кривыми – параболический.

2) Производные функции $f(u)$ одинакового знака. Тогда:

2a) если $f'(\bar{u}) < 0, f'(\bar{v}) < 0$, то точки $(0, \bar{u}), (0, \bar{v})$ – седла, сепаратриссы которых $u = \bar{u}$, $u = \bar{v}$.

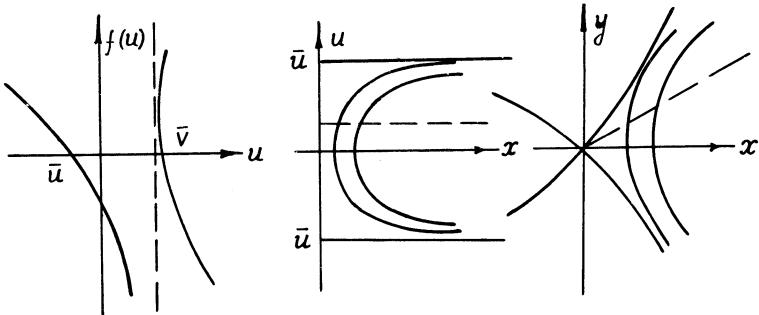


Рис. 4. $f(u)$ имеет I полюс, а интегральные кривые – одну точку перегиба

На плоскости (x, y) между сепаратрисами $y = \bar{u}x^\alpha + O(x^\alpha)$, $y = \bar{v}x^\alpha + O(x^\alpha)$ заключен гиперболический сектор.

2б) если $f'(\bar{u}) > 0, f'(\bar{v}) > 0$, то точки $(0, \bar{u}), (0, \bar{v})$ суть узлы. Интегральные кривые выходят из одного узла и входят в другой.

На плоскости (x, y) вблизи особой точки кривые образуют эллиптический сектор. При построении полной картины нужно учитывать члены более высокого порядка, которые не попали в модельное уравнение (9)

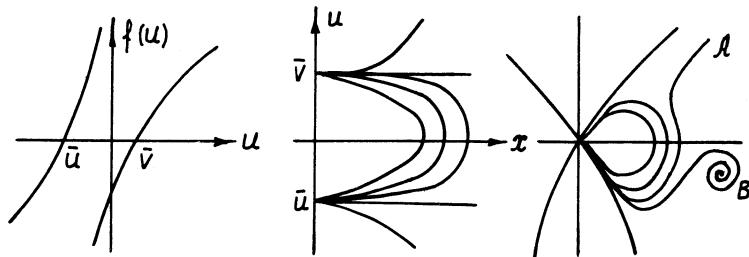


Рис.5. Кривая А уходит на ∞ , а В - в свободную точку.

6. Согласование разных асимптотик исключительных линий

Если уравнение (I) имеет интегральные кривые вида $y = 1x^{\alpha_1} + O(x^{\alpha_1})$, то они входят в O вдоль исключительных линий $y = 1x^{\alpha_1}$. После преобразования (6) их образы на плоскости (x, u) будут иметь асимптотику $x^{1-\alpha_1}$. Поведение решений этого типа исследуется так же, как описано выше, применяя к уравнению (I) замену переменных

$$\begin{cases} x = x \\ u = \frac{x}{x^{\alpha_1}} \end{cases} \quad x \neq 0.$$

(Отметим, что многоугольник Ньютона перечисляет все возможные показатели замены α).

В заключение подчеркнем, что разные типы асимптотик равноправны. ε - окрестность особой точки O на плоскости (x, y) состоит из секторов с интегральными кривыми раз-

ногого касания с координатными осями

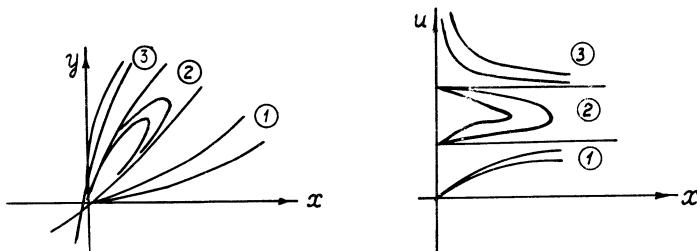


Рис. 6.

К кривым, изображенным на рисунке, применено преобразование (6), у которого показатель α выбирается по пучку (2). Нетрудно разобрать случаи, когда замена переменных строится по кривым пучка (1) или (3).

7. Дополнительное вырождение

Если уравнение (10) имеет кратный корень u_0 , то точка $(0, u_0)$ в дифференциальном уравнении (7) сложная. Знания интегральных кривых "укороченного" модельного уравнения (9) оказывается недостаточно. Окрестность исключительной линии $u = u_0 x^\alpha$ обнаруживает тонкую структуру. (См. замечание I).

Точку $(0, u_0)$ можно исследовать методом, изложенным выше, применив к уравнению (7) замену переменных $u = \frac{v - u_0}{x^\beta}$ (β определяется с помощью многоугольника Ньютона уравнения (7)).

8. Алгоритм исследования особой точки

Исследование сложной особой точки на плоскости проводится в 3 этапа.

I. Отыскание по многоугольнику Ньютона показателей.

II. Замена переменных и вычисление правой части модельной системы (отдельно для каждого α).

III. Интегрирование модельной системы и построение поля интегральных кривых.

Необходима проверка отсутствия дополнительного вырождения. Иначе исследование продолжается (в принципе, по общей схеме).

Учитывая особенности дифференциального уравнения на плоскости, пункт III можно заменить исследованием особых точек модельного уравнения.

9. Приложение

Разработанная методика применялась для исследования характера сложных стационаров моделей, описывающих кинетику узлового участка гликолитической системы ферментов [5],[6].

Сложная точка $(\infty, 0)$ систем

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha - xy^2 \\ \dot{y} = xy^2 - y \end{cases}$$

оказалось седло - узлом. Численное отыскание предельного цикла существенно упростило знание асимптотики сепаратриссы этой точки.

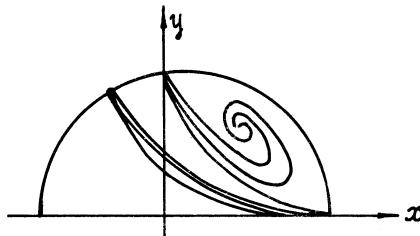


Рис. 7.

Система

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha - xy^2 - \beta x \\ \dot{y} = xy^2 - y \end{cases}$$

при критических значениях параметров $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$ имеет вырожденное седло при $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$. Для исследования этой точки оказалось полезным отыскание 2-х членов разложения сепаратриссы

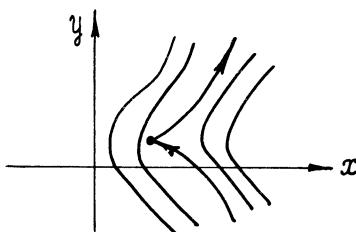


Рис. 8.

Л и т е р а т у р а

1. Андронов А.А., Леонтьевич Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.
Качественная теория динамических систем второго порядка. "Наука", М., 1966.
2. Немышкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М., 1949.
3. Вайнберг, М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. "Наука", М., 1969.
4. Березовская Ф.С., Молчанов А.М. В сб. "Колебательные процессы в биологических и химических системах", т.2., Пущино-на-Оке, 1971.
5. Сельков Е.Е. В сб. "Бионика. Моделирование биосистем", Изд-во. НТОРиЭ, Киев, стр.99, 1967.
6. Сельков Е.Е. "Молекулярная биология", (II), 252, 1968.